Théorème 0.0.1 (Théorème d'Auerbach)**.** *Soit V un espace vectoriel réel de dimension finie $n \geq 1$ muni d'une norme $||.||$. Il existe une base de vecteurs unitaires de V telle que sa base duale soit aussi formée de vecteurs unitaires pour la norme induite par $||.||$ sur V^*.*

Démonstration. Soit $B = (e_1, ..., e_n)$ une base unitaire de V et $B^*(e_1^*, ..., e_n^*)$ sa base duale.
Alors par définition : pour tout $x \in V$, $x = \sum\limits_{i=1}^{n} e_i^*(x)e_i$ et $\forall i, j \in [\![1, n]\!]$, $e_i^*(e_j) = \delta_{ij}$.
On note $|||e_i^*||| = \underset{x \in V}{Sup} \frac{|e_i^*(x)|}{||x||} = \underset{\substack{x \in V \\ ||x||=1}}{Sup} |e_i^*(x)|$.

- Montrons que $|||e_i^*||| \geq 1$:

On a $|||e_i^*||| \geq \frac{|e_i^*(e_i)|}{||e_i||}$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, or $\frac{||e_i^*(e_i)||}{||e_i||} = \frac{|1|}{1} = 1$, car B est une base unitaire. Le résultat qu'on vient de montrer est en particulier vrai pour toute base duale d'une base unitaire.

- Montrons $|||e_i^*||| = 1$: Soit B_0 une base de V. Soit S la sphère unité de V et soit :

$$f : S^n \longrightarrow \mathbb{R}^+, \quad (x_1, ..., x_n) \mapsto |det_{B_0}(x_1, ..., x_n)|.$$

Le determinant et la fonction valeur absolue sont continues donc f est continue par composition. De plus, f est définie sur S^n compacte et à valeurs dans $\mathbb{R}$ donc f atteint son maximum.
Soit $B = (e_1, ..., e_n) \in S^n$ un point où f est maximale, f n'étant pas identiquement nulle alors $f(e_1, ..., e_n) > 0$, d'où B est une famille de n vecteurs libres dans un espace de dimension n et $\forall i$, $e_i \in S$ donc B est une base unitaire de V. Par le premier point on a alors $|||e_i^*||| \geq 1$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$.
Soit $i \in [\![1, n]\!]$ et $x \in S$, $(e_1, ..., e_{i-1}, x, e_{i+1}, ..., e_n) \in S^n$ donc

$$f(e_1, ..., e_{i-1}, x, e_{i+1}, ..., e_n) \leq f(e_1, ..., e_n) \quad (*)$$

or $x = \sum\limits_{j=1}^{n} e_j^*(x)e_j$.
Donc

$$\begin{aligned} f(e_1, ..., e_{i-1}, x, e_{i+1}, ..., e_n) &= |det_{B_0}(e_1, ..., e_{i-1}, x, e_{i+1}, ..., e_n)| \\ &= |\sum_{j=1}^{n} e_j^*(x) det_{B_0}(e_1, ..., e_{i-1}, e_i, e_{i+1}, ..., e_n)| \\ &= |e_i^*(x) \times det_{B_0}(e_1, ..., e_n)| \end{aligned}$$

car le déterminant est multilinéaire alterné, donc nul lorsque deux vecteurs sont liés. On a donc :

$$f(e_1, ..., e_{i-1}, x, e_{i+1}, ..., e_n) = |e_i^*(x)| \times f(e_1, ..., e_n). \quad (**)$$

Ainsi, $|e_i^*(x)| \leq 1$ pour tout $x \in V$ unitaire par $(*)$ et $(**)$ donc $|||e_i^*||| \leq 1$ donc $|||e_i^*||| = 1$ et on a trouvé une base vérifiant le théorème.

□

Ref : FGN, Algèbre 2, p.10